

Mecánica Clásica II

Tema 1: Métodos variacionales e principio de Hamilton

José M. Sánchez de Santos
Departamento de Física de Partículas
Facultade de Física
USC

Notas de clase da materia Mecánica Clásica II do Grao en Física da USC

Índice

1. Introducción	3
2. Técnicas do cálculo variacional	3
2.1. Ecuacións de Euler-Lagrange	3
2.1.1. Segunda forma das ecuacións de Euler	6
2.2. Exemplos	7
2.2.1. Xeodésicas no plano:	7
2.2.2. Problema da braquistocrona:	8
3. O principio de Hamilton	9
3.1. O funcional de acción.	9
3.2. Sistemas non conservativos	10
3.3. Potenciais dependentes da velocidade	11
3.4. Exemplo: partícula nun campo electromagnético:	11
4. Sistemas con ligaduras. Método dos multiplicadores de Lagrange	12
4.1. Sistemas con dous graos de liberdade e unha ligadura	12
4.1.1. Significado físico dos multiplicadores:	14
4.2. Exemplo: máquina de Atwood:	15
4.3. Caso xeral	15
4.4. Significado físico dos multiplicadores de Lagrange	17
4.5. Ligaduras holónomas	18
4.6. Exemplo: aro que roda por un plano inclinado.	19
5. Propiedades de simetría e leis de conservación	20
5.1. Unicidade da lagrangiana. Transformacións gauge.	20
5.2. Teorema de Noether	21
6. Formalismo hamiltoniano	24
6.1. Transformacións de Legendre e función hamiltoniana	24
6.2. Ecuacións canónicas	25
6.3. Exemplos	26
6.3.1. Partícula nun potencial central	26
6.3.2. Partícula cargada nun campo electromagnético	27
6.4. As ecuacións canónicas e o principio variacional	28
6.5. Corchetes de Poisson	28

1. Introducción

Imos ver como as ecuacións de Lagrange pódense deducir dun principio fundamental, o principio de Hamilton, que pode considerarse coma un dos principios máis importante da Física, non só da Mecánica.

Ata agora introducíramos as ecuacións de Lagrange mediante un principio diferencial, o principio de d'Alembert ou dos traballos virtuais, a partir da formulación Newtoniana. Agora imos deducir as mesmas ecuacións dun principio integral de xeito que as ecuacións do movemento son aquelas que garanten que unha certa magnitude (o funcional de acción) ten un extremo.

Principios deste tipo son coñecidos en Óptica, por exemplo o formulado por Herón no século II cando dixo que os raios de luz que se reflicten nun espello seguen o camiño máis curto posible (a lei da reflexión) ou cando Fermat, no século XVII postula que os raios de luz viaxan dun punto a outro ao longo do camiño que fai que o tempo investido sexa o menor posible (leis da reflexión e a refracción).

Os estudos sobre estes métodos (o cálculo variacional) tiveron o seu auxe no século XVII cos traballos de Newton, Leibnitz, a familia Bernouilli e outros e o problema da braquistocrona que resolveremos máis adiante.

En Mecánica, o primeiro en enunciar un principio variacional foi Maupertuis en 1747 nos termos de que o movemento é tal que a acción faise mínima. Esta acción sería minimizada *pola infinita sabedoría de Deus*.

Arredor de 1760, Euler e Lagrange danlle unha base matemática sólida a este principio e en 1834 Hamilton formula o seu principio tal como o imos estudar: de todas as posibles traxectorias no espazo de configuracións compatibles coas ligaduras que pode seguir un sistema dinámico para evolucionar dun estado a outro nun tempo determinado, a traxectoria verdadeiramente seguida será aquela que fai estacionaria a integral temporal da diferenza entre as enerxías cinética e potencial:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt(T - V) = 0.$$

Estudaremos antes que nada algunhas técnicas matemáticas do cálculo de variacións.

2. Técnicas do cálculo variacional

2.1. Ecuacións de Euler-Lagrange

Para simplificar, comezaremos formulando o problema nun plano e enunciarémolo da seguinte maneira: queremos atopar unha curva $y = y(x)$ (que suporemos ten propiedades suficientemente boas de continuidade e diferenciabilidade) tal que a integral curvilínea dunha certa función $f(y, \frac{dy}{dx}, x)$ sexa

estacionaria ou extremal. É dicir, buscamos a función $y = y(x)$ tal que o funcional

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx f[y(x), y'(x), x], \quad \text{con } y' = \frac{dy}{dx}$$

sexa un extremo (máximo, mínimo ou punto de inflexión). Consideraremos curvas tales que os seus puntos extremos son fixos:

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

e expresaremos o problema de xeito que o resolveremos usando as técnicas do cálculo diferencial ordinario.

Para elo introducimos unha familia de curvas parametrizadas por α , elixindo que a curva correspondente a $\alpha = 0$ sexa a que extremiza a integral. Sexa pois

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x),$$

onde η é unha función arbitraria que se anula nos extremos:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

ou sexa, que todas as curvas da familia pasan polos mesmos puntos inicial e final:

$$\begin{aligned} y(x_1, \alpha) = y(x_1, 0) &= y_1 \\ y(x_2, \alpha) = y(x_2, 0) &= y_2, \quad \forall \alpha \end{aligned}$$

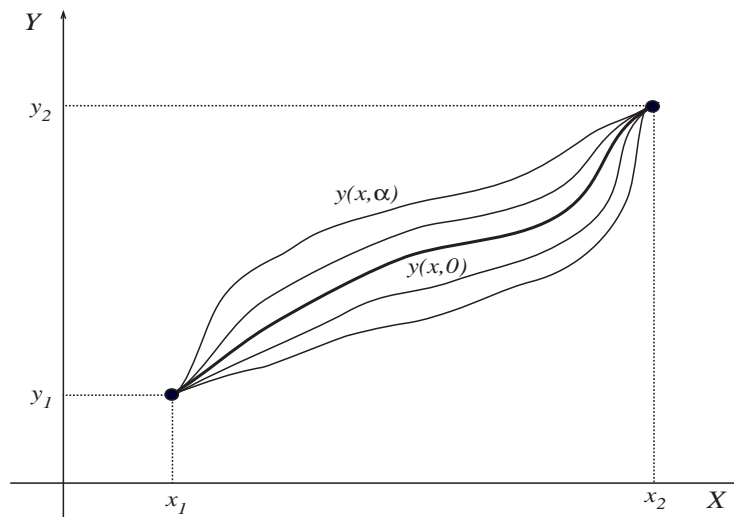


Figura 1: Traxectorias

e definimos a integral para a familia de curvas:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx f[y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x].$$

Sexan as variacións do valor do funcional con respecto ao valor estacionario

$$J(\alpha) = J(\alpha = 0) + \frac{dJ}{d\alpha}(\alpha = 0)\alpha + \dots,$$

é dicir

$$\delta J = J(\alpha) - J(\alpha = 0) = \frac{dJ}{d\alpha}(\alpha = 0)\alpha,$$

onde estamos considerando J como unha función ordinaria de α . Igualmente:

$$\delta y(x, \alpha) = y(x, \alpha) - y(x, 0) = \frac{\partial y}{\partial \alpha}(\alpha = 0)\alpha = \alpha \eta(x)$$

a condición de punto estacionario é:

$$\delta J = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dJ}{d\alpha}(\alpha = 0) = 0.$$

Calculemos esta derivada usando a regra da cadea

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right]$$

e fixémonos que no segundo termo y aparece derivada con respecto a x e con respecto a α . Intercambiando a orde das derivadas e integrando por partes temos:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right] - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Como todas as curvas pasan polos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, $\left[\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]_{x_1}^{x_2} = \eta(x_2) - \eta(x_1) = 0$, daquela

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

e

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) = 0$$

e como $\eta(x)$ é arbitraria agás os puntos extremos, para que $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0$ tense necesariamente que satisfacer

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0,$$

que é a ecuación diferencial de Euler para a curva $y = y(x)$ que resolve o noso problema.

No caso máis xeral no que o funcional J depende non dunha senón de varias curvas:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx f[y_j(x), y'_j(x), x]$$

con $j = 1, 2, \dots, n$, razoaremos de forma análoga definindo familias de curvas $y_j(x, \alpha) = y_j(x) + \alpha \eta_j(x)$, $j = 1, \dots, n$ co cal chegamos á condición:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_j} \right) \right] \eta_j(x),$$

a cal, dada a arbitrariedade e independencia das $\eta_j(x)$, equivale ás n ecuacións de Euler:

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_j} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Nalgúns casos particulares a función f non depende dunha das y_j . Neste caso a correspondente ecuación de Euler ten unha forma especialmente sinxela e unha primeira integración das mesmas é inmediata:

$$\frac{\partial f}{\partial y'_j} = c,$$

onde c é unha constante independente de x .

2.1.1. Segunda forma das ecuacións de Euler

Calculemos a derivada total da función f con respecto á variable independente x :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_j \left[\frac{\partial f}{\partial y'_j} y''_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} y'_j \right] = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx} \sum_j \left[\frac{\partial f}{\partial y'_j} y'_j \right] + \sum_j \left[-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial y_j} \right] y'_j \end{aligned}$$

e, polo tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx} \left[\sum_j \frac{\partial f}{\partial y'_j} y'_j - f \right] = 0.$$

Esta é a chamada *segunda forma das ecuacións de Euler*, que é especialmente conveniente cando f non depende explicitamente da variable independente x , $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ xa que entón:

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_j \frac{\partial f}{\partial y'_j} y'_j - f \right] = 0$$

e a cantidade entre corchetes é unha constante independente de x :

$$\sum_j \frac{\partial f}{\partial y'_j} y'_j - f = c.$$

2.2. Exemplos

2.2.1. Xeodésicas no plano:

Imos resolver o problema de atopar a curva de lonxitude mínima que pasa por dous puntos dun plano, P_1, P_2 .

A métrica euclídea é:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

que se pode expresar

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

onde estamos elixindo x como coordenada independente, é dicir, consideramos curvas $y = y(x)$ que pasan polos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ de xeito que o funcional lonxitude:

$$L = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

sexa mínimo. Neste caso a lagrangiana non depende de y nin de x : $f(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ e as ecuacións de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0,$$

de onde

$$\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = c,$$

onde c é unha constante, e, polo tanto

$$y' = \sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2}} = a$$

que é a ecuación dunha recta $y = ax + b$, determinándose as constantes coas condicións de que a recta pase polos puntos extremos: $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

Esta é a maneira de calcular as xeodésicas sobre unha superficie, aínda que a métrica non será a euclídea no caso máis xeral.

2.2.2. Problema da braquistocrona:

Trátase de atopar a curva tal que, dados dous puntos dun plano vertical, unha partícula que parte do repouso cae baixo a acción da gravidade do punto máis alto ao máis baixo no menor tempo posible. A solución a este problema que imos ver é debida a Johann Bernoulli en 1696, pero existen outras alternativas debidas a Newton, Leibnitz, etc.

Sexa x a distancia ao longo dun eixo vertical dirixido cara abaixo. O tempo investido en percorrer un elemento ds ao longo da curva é $dt = \frac{ds}{v}$, onde v é a velocidade. O ingrediente orixinal da solución de Bernoulli é utilizar a conservación da enerxía: $mgx = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gx}$. O funcional a minimizar é o tempo total de caída:

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v} = \int_0^x dx \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}.$$

A *lagrangiana* é agora:

$$f(y, y', x) = \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}$$

e a ecuación de Euler-Lagrange, dado que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+y'^2}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2y'}{x} = c,$$

de onde $y'^2 = c^2 x(1+y'^2)$, sendo c unha constante de integración, e, despejando e integrando:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{cx}{\sqrt{x - c^2 x^2}} \Rightarrow y(x) = \int dx \frac{cx}{\sqrt{x - c^2 x^2}}.$$

Para calcular a integral e escribir a solución en forma paramétrica, facemos o cambio de variable:

$$x = \frac{1}{2c^2}(1 - \cos \theta) \Rightarrow dx = \frac{1}{2c^2} \sin \theta d\theta$$

e a integral queda, despois dun pequeno cálculo:

$$y(\theta) = \frac{1}{2c^2} \int d\theta(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2c^2}(\theta - \sin \theta) + b$$

onde b é unha segunda constante de integración. Se, sen perder xeneralidade, fixamos o punto inicial na orixe de coordenadas $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ e $y = 0 \Rightarrow b = 0$, co cal temos a ecuación da braquistocrona en forma paramétrica:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2c^2}(1 - \cos \theta) = a(1 - \cos \theta) \\y &= \frac{1}{2c^2}(\theta - \sin \theta) = a(\theta - \sin \theta),\end{aligned}$$

que é a ecuación dunha *cicloide* onde a constante $a = \frac{1}{2c^2}$ virá fixada pola condición de que a curva pase polo punto final (x_2, y_2) .

Por exemplo, se $(x_2, y_2) = (1, 1) \Rightarrow a(1 - \cos \theta_2) = 1 = a(\theta_2 - \sin \theta_2)$, ecuación que se pode resolver numericamente para dar $\theta_2 = 2.412$, $a = 0.573$. O tempo total pode calcularse ao longo da cicloide:

$$T_{\text{cic}} = \int_0^{2.412} d\theta f(\theta, \dot{\theta}, x) = \frac{1.826}{\sqrt{g}} = 0.583 \text{ s},$$

se as distancias están en metros, mentres que calculado ao longo dunha recta obtense:

$$T_{\text{rec}} = \frac{2}{\sqrt{g}} = 0.639 \text{ s},$$

e ao longo dun arco de circunferencia:

$$T_{\text{arc}} = \frac{1.854}{\sqrt{g}} = 0.592 \text{ s}.$$

3. O principio de Hamilton

3.1. O funcional de acción.

Consideremos a integral:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

Se identificamos

$$\begin{aligned}x &\rightarrow t \\y_i &\rightarrow q_i \\f(y_i, y'_i, x) &\rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t)\end{aligned}$$

vemos que as ecuacións de Lagrange que coñecemos son precisamente as ecuacións de Euler-Lagrange deducidas da condición ou principio variacional de que S sexa un extremo:

$$\delta S = 0$$

Este é o *principio de Hamilton* para sistemas conservativos: o movemento do sistema entre os tempos t_1 e t_2 é tal que a integral curvilínea $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, onde $L = T - V$, é extremal respecto das traxectorias $q_i = q_i(t)$. S é a *acción* no sentido de Hamilton. O principio pode enunciarse tamén dicindo que de todas as traxectorias posibles que pode describir o sistema para evolucionar entre os tempos t_1 e t_2 , a que en realidade describirá é aquela que fai estacionaria ou extremal a acción S (normalmente trátase dun mínimo).

O principio de Hamilton é equivalente ás ecuacións de Lagrange e á segunda lei de Newton. Pódese construír toda a Mecánica dos sistemas conservativos tomando como postulado básico o principio de Hamilton. Algunhas das vantaxes que ten este principio son:

- Manexa só magnitudes escalares, polo que é un método invariante baixo cambios de coordenadas.
- Permite describir coa linguaxe da mecánica sistemas que non son mecánicos (teorías de campos, mecánica estatística, etc.) xa que se basea en enerxías e non en forzas e posicións.
- Xeneralízase ao caso relativista.
- Abre as portas da Mecánica Cuántica (formalismo da integral de camiño)

3.2. Sistemas non conservativos

O principio de Hamilton pódese formular tamén para sistemas non conservativos, caso no que se expresará:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt = 0,$$

onde δW é o traballo virtual total de todas as forzas:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j Q_j \delta q_j.$$

Deste principio dedúcense as ecuacións de Lagrange para sistemas non necesariamente conservativos. Neste caso a integral da variación da enerxía cinética máis o traballo virtual total realizado debe ser estacionaria. O caso conservativo é un caso particular, xa que entón:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \Rightarrow \delta W = \sum_j Q_j \delta q_j = -\sum_j \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j = -\delta V,$$

co cal

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

recuperando a formulación anterior do principio de Hamilton. Nun sistema xeral, non necesariamente conservativo temos:

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} W dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j Q_j \delta q_j dt\end{aligned}$$

e, sumando:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j \right] \delta q_j dt.$$

Se as coordenadas q_j son independentes, isto conduce a que cada un dos termos no sumatorio debe anularse por separado e obtemos as ecuacións de Lagrange no caso xeral:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

3.3. Potenciais dependentes da velocidade

Aínda no caso de que as forzas dependan da velocidade, se é posible atopar unha función $U(q, \dot{q}, t)$ tal que

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

é posible definir unha función lagrangiana $L = T - U$ de xeito que as ecuacións do movemento son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

U chámase *potencial dependente da velocidade*. Se ademais hai forzas que deriven dun potencial conservativo no sentido ordinario $V(q)$, este pode incluírse en U , xa que $Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j}$ redúcese a $-\frac{\partial V}{\partial q_j}$ para os termos que non conteñen as velocidades.

3.4. Exemplo: partícula nun campo electromagnético:

O exemplo máis interesante é, desde logo, o da forza electromagnética sobre unha partícula cargada, a forza de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

que no caso en que non exista campo magnético $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ é conservativa, xa que deriva do potencial escalar electrostático Φ : $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q\nabla\Phi$. Non é difícil comprobar que as compoñentes de \mathbf{F} poden poñerse como

$$F_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

onde

$$U = q\Phi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v},$$

sendo Φ o potencial escalar e \mathbf{A} o *potencial vector*. Os campos eléctrico e magnético exprésanse en termos de ditos potenciais como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned}$$

A lagrangiana dunha partícula cargada nun campo electromagnético pode escribirse entón como:

$$L = T - U = T - q\Phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v},$$

e as ecuacións do movemento teñen a mesma forma que no caso conservativo.

U pode depender de t . Se non é así e o sistema de coordenadas é fixo (ligaduras independentes do tempo), entón L é independente do tempo e a cantidade

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

será unha constante do movemento. Neste caso dise que as forzas son conservativas, aínda que dependan da velocidade. Se U é linear nas velocidades (como no caso electromagnético), entón $H = T + V$, onde V é a enerxía potencial ordinaria (a parte independente das velocidades), no noso exemplo:

$$H = T + V = T + q\Phi.$$

4. Sistemas con ligaduras. Método dos multiplicadores de Lagrange

4.1. Sistemas con dous graos de liberdade e unha ligadura

Comezaremos polo caso sinxelo dun sistema con dous graos de liberdade e coordenadas (x, y) e unha ligadura holónoma $f(x, y) = 0$. O método lagrangiano que coñecemos ata o de agora consiste en eliminar unha das coordenadas utilizando a ecuación da ligadura, deixando a outra como única coordenada independente. Neste proceso, a forza de ligadura non aparece en ningún momento.

Supoñamos que temos algunha razón para querer coñecer esa forza de ligadura. O que faremos será manter as dúas variables e incorporar a ligadura dunha maneira distinta.

Consideremos o funcional de acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) dt.$$

O principio de Hamilton dinos que para unha variación das traxectorias no espazo de configuracións:

$$\begin{aligned} x(t) &\longrightarrow x(t) + \delta x(t) \\ y(t) &\longrightarrow y(t) + \delta y(t), \end{aligned}$$

a acción é estacionaria:

$$\delta S = 0.$$

Entón:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dt = \\ &= \int \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right) \delta x dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \right) \delta y dt = 0 \end{aligned}$$

para calquera desprazamento $\delta x, \delta y$ compatible coas ligaduras. Se $\delta x, \delta y$ fosen independentes, cada integral tería que anularse por separado e obteríamos as dúas ecuacións do movemento. Pero como temos unha ligadura $f(x, y) = 0$, estes desprazamentos xa non son independentes, senón que satisfán a ecuación:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0$$

ou

$$a_x \delta x + a_y \delta y = 0,$$

onde $a_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $a_y = \frac{\partial f}{\partial y}$. Se multiplicamos a ecuación anterior por unha función en principio arbitraria $\lambda(t)$ (*multiplicador indeterminado de Lagrange*), a integramos e sumamos á integral do principio variacional, é evidente que seguimos tendo:

$$\int \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta y dt = 0$$

Como a función $\lambda(t)$ é arbitraria, imos elixila de xeito que se satisfaga:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \forall \delta x,$$

co cal a primeira integral anúlase. Agora o multiplicador $\lambda(t)$ xa non é arbitrario; está determinado pola ecuación anterior. Volvendo á integral do principio variacional, o factor que multiplica a δy debe anularse e temos:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \forall \delta y.$$

O resultado final é que temos as ecuacións de Lagrange modificadas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(t) a_x \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda(t) a_y, \end{aligned}$$

que xunto coa ecuación de ligadura

$$f(x, y) = 0$$

forman un sistema de tres ecuacións nas que as funcións incógnita son agora $x(t)$, $y(t)$ e $\lambda(t)$. É importante decatarse de que as ecuacións de Lagrange modificadas son as ecuacións de Lagrange ordinarias que obteríamos dunha lagrangiana

$$\tilde{L} = L + \lambda f,$$

como é doado comprobar, xa que nin λ nin f dependen das velocidades. Este procedemento é análogo ao de cálculo de extremos condicionados na análise matemática ordinaria.

4.1.1. Significado físico dos multiplicadores:

Antes de pasar ao estudo xeral do método, imos xa tratar de entender o significado físico do multiplicador λ . Sigamos co caso simplificado de dúas coordenadas e unha ligadura holónoma e consideremos a lagrangiana:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 - U(x, y)$$

que pode representar dúas partículas nunha dimensión cunha interacción mutua dada polo potencial U , e a ligadura holónoma $f(x, y) = 0$. Seguindo o procedemento anterior obtemos que a ecuación do movemento para a coordenada x :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(t) a_x$$

é, neste caso:

$$m_1 \ddot{x} = - \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

que é a ecuación de Newton para a partícula 1. O primeiro termo do segundo membro da ecuación é a forza aplicada que actúa sobre a partícula $-\frac{\partial U}{\partial x} =$

$F_x^{(a)}$. Dado que dito segundo membro representa a forza total resultante, o termo do multiplicador ten que ser necesariamente a forza de ligadura, é dicir:

$$m_1\ddot{x} = F_x = F_x^{(a)} + F_x^{(lig)}$$

onde

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} = F_x^{(lig)}$$

e analogamente para y . Resumindo, podemos afirmar que *o multiplicador de Lagrange representa basicamente a forza de ligadura*.

4.2. Exemplo: máquina de Atwood:

Vexamos como exemplo a máquina de Atwood, onde a lagrangiana é:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 + m_1gx + m_2gy$$

coa ligadura de que a lonxitude total da corda que une ambas masas é constante $x + y = l$ ou

$$f(x, y) = x + y - l = 0.$$

As ecuacións do movemento serán neste caso:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(t) a_x \Rightarrow m_1\ddot{x} - m_1g = \lambda \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda(t) a_y \Rightarrow m_2\ddot{y} - m_2g = \lambda \\ \ddot{x} + \ddot{y} &= 0 \end{aligned}$$

Nas ecuacións anteriores vese que λ representa a tensión da corda, que ten dirección contraria ao peso $\lambda = -T$. A solución do sistema de ecuacións anteriores é a que xa coñecemos:

$$\ddot{x} = -\ddot{y} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g \quad \lambda = -2\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}g$$

4.3. Caso xeral

Supoñamos que temos un sistema con coordenadas q_k , $k = 1 \dots n$. Para deducir as ecuacións de Lagrange a partir do principio variacional $\delta S = 0$, a condición de sistema holónomo utilizábase só ao final do razoamento, cando as δq_k considerábanse independentes. Supoñamos agora que temos ligaduras adicionais do tipo:

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} = 0 \quad l = 1, \dots, m$$

ou

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0 \quad l = 1, \dots, m,$$

onde os $a_{lk} = a_{lk}(q, t)$ son coeficientes dependentes das coordenadas e do tempo. Este tipo de ligaduras dependen linearmente das velocidades e polo tanto non son, en xeral, holónomas, pois non sempre se poden integrar estas m ecuacións para poñelas da forma

$$f_l(q, t) = 0 \quad l = 1, \dots, m.$$

Non obstante, o caso holónimo é un caso particular, pois un conxunto de ligaduras holónomas sempre se pode derivar:

$$\frac{\partial f_l}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0,$$

que é da forma anterior con

$$a_{lk} = \frac{\partial f_l}{\partial q_k}, \quad a_{lt} = \frac{\partial f_l}{\partial t}.$$

En todo o procedemento variacional, os desprazamentos son virtuais, a t constante, e polo tanto:

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} \delta q_k = 0, \quad (\delta t = 0)$$

co cal, os δq_k deixan de ser independentes. Para reducir o número de desprazamentos virtuais e deixar só aqueles que si poidan considerarse independentes, utilizaremos os multiplicadores de Lagrange. Se multiplicamos cada unha das ecuacións anteriores por funcións arbitrarias do tempo λ_l :

$$\lambda_l \sum_{k=1}^n a_{lk} \delta q_k = 0,$$

e sumando a todas as ligaduras e integrando sobre o tempo dá:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{l=1}^m \lambda_l \sum_{k=1}^n a_{lk} \delta q_k = 0$$

Se volvemos a dedución das ecuacións de Lagrange a partir do principio de Hamilton, lembremos que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k = 0$$

Sumando estas dúas últimas expresións chegamos a que

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right] \delta q_k = 0$$

A existencia das m ligaduras fai que os δq_k non sexan independentes, polo que non se pode igualar a 0 cada un dos termos entre corchetes. Consideremos como independentes os $n - m$ primeiros; os m restantes virán dados en función deles polas m ecuacións de ligadura. Sen embargo, os λ son arbitrarios e polo tanto podemos escollelos da maneira que máis nos conveña. Fagámolo de xeito que

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0, \quad k = n - m + 1, \dots, n$$

co cal nos queda:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{n-m} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right] \delta q_k = 0,$$

expresión onde o primeiro sumatorio chega ata $n - m$ e os λ_l xa non son arbitrarios, pois están fixados pola ecuación anterior. Agora si que os δq_k , con $k = 1, \dots, n - m$ xa son independentes e podemos igualar a 0 coeficiente a coeficiente:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0, \quad k = 1, \dots, n - m.$$

En conclusión, o método lévanos a considerar o sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} &= 0, \quad k = 1, \dots, n \\ \sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} &= 0, \quad l = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

que son $n + m$ ecuacións con $n + m$ incógnitas: as n q_k e os m λ_l .

4.4. Significado físico dos multiplicadores de Lagrange

Neste procedemento temos entón máis ecuacións que no ordinario de Lagrange, onde as ligaduras se incorporan dende o principio. Insistamos en que agora as ecuacións de ligadura non se utilizan ata o final, co cal temos un sistema máis complexo, pero a cambio tamén obtemos máis información: aquela contida nos propios multiplicadores. Vexamos agora cal é o significado físico destes: xa sabemos que se trata basicamente das forzas de ligadura. Se escribimos as ecuacións como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk}$$

e supoñemos que estamos no caso conservativo e L contén o potencial das forzas aplicadas, podemos reescribir as ecuacións como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = Q_k^{(a)} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk}.$$

O primeiro termo do segundo membro é a forza xeneralizada aplicada, mentres que o segundo termo ten que ser a forza xeneralizada de ligadura para ter as ecuacións de Lagrange xerais:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = Q_k^{(a)} + Q_k^{(lig)}.$$

Polo tanto:

$$\sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = Q_k^{(lig)}$$

e recuperamos o resultado de que coñecidos os multiplicadores de Lagrange coñecemos tamén as forzas de ligadura como parte da solución obtida por este método, que, resumindo, utilizaremos cando:

- Non se poida ou non resulte cómodo reducir todas as coordenadas a independentes, eliminando as restantes das ecuacións de ligadura.
- As ligaduras sexan non holónomas porque dependen das velocidades de forma linear.
- Interésanos coñecer as forzas de ligadura.

4.5. Ligaduras holónomas

Volvamos ao caso en que as ligaduras sexan holónomas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{l=1}^m \lambda_l f_l(q, t) \right)$$

que se pode escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_k} = 0,$$

sendo

$$\tilde{L} = L + \sum_{l=1}^m \lambda_l f_l(q, t)$$

e onde utilizamos que os termos $\lambda_l f_l$ non dependen das velocidades. Definindo:

$$W = - \sum_{l=1}^m \lambda_l f_l(q, t),$$

entón:

$$\tilde{L} = L - W = T - (V + W)$$

e W xoga o papel de potencial das forzas de ligadura.

Vemos que neste caso, o método é totalmente análogo ao dos multiplicadores de Lagrange que utilizabamos no cálculo diferencial ordinario para problemas de máximos e mínimos condicionados.

4.6. Exemplo: aro que roda por un plano inclinado.

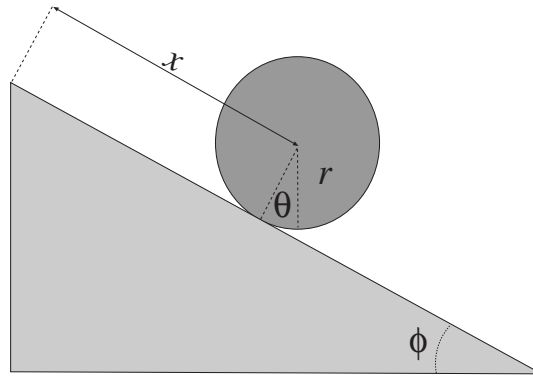


Figura 2: Aro que roda por un plano inclinado

Consideremos o sistema da figura, onde un aro roda sen esvarar por un plano inclinado. Tomaremos como coordenadas xeneralizadas a distancia medida ao longo do plano, x e o ángulo que roda o aro, θ . A ligadura de rodar sen esvarar pode expresarse mediante a condición de que o punto de contacto do aro co plano ten velocidade instantánea nula. Dita velocidade ten un termo de translación e outro de rotación: $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$ e no noso caso escríbese:

$$0 = \dot{x} - r\dot{\theta},$$

onde r é o radio do aro. Neste caso temos unha soa ligadura á que lle imos asignar un multiplicador de Lagrange λ . Podemos escribila tamén da seguinte forma:

$$dx - r d\theta = 0$$

e os coeficientes que aparecen nas ecuacións do movemento serán $a_x = 1$, $a_\theta = -r$. Evidentemente a ligadura pode integrarse para poñela como unha ligadura holónoma que relaciona alxebricamente x e θ : $x = r\theta$.

Para escribir a lagrangiana debemos ter en conta que a enerxía cinética do aro se pode poñer como suma dun termo de translación e outro de rotación:

$$T = T_{tr} + T_{rot} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

onde $I = Mr^2$ é o momento de inercia do aro respecto ao seu centro. A enerxía potencial respecto á base do plano inclinado é $V = Mg(l - x) \sin \phi$, onde l é a lonxitude do plano e ϕ a inclinación do mesmo. A lagrangiana é, entón:

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 - Mg(l - x) \sin \phi.$$

Nesta lagrangiana aínda non se incorporou a ligadura e seguen aparecendo ambas coordenadas e velocidades; isto farémolo só despois de escribir o sistema de ecuacións do movemento:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} - Mg \sin \phi &= \lambda a_x = \lambda \\ Mr^2\ddot{\theta} &= \lambda a_\theta = -\lambda r \\ \dot{x} &= r\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Este é un sistema de tres ecuacións onde as funcións incógnita son x , θ e λ . Se tivéramos utilizado o método lagrangiano normal, sen multiplicadores, teríamos só unha ecuación correspondente ao único grao de liberdade que quedaría se incorporásemos a ligadura dende o principio.

A solución do sistema é doada de obter, derivando a ligadura e substituíndo nas outras dúas ecuacións:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}g \sin \phi, \quad \lambda = -\frac{1}{2}Mg \sin \phi, \quad \ddot{\theta} = \frac{1}{2r}g \sin \phi.$$

O aro descende polo plano coa metade da aceleración coa que o faría se esvarase sen rodar. A forza de ligadura é a forza de rozamento que implementa a rodadura:

$$Q_x = F_x = \lambda a_x = \lambda = -\frac{1}{2}Mg \sin \phi,$$

onde o signo menos indica que a forza vai no sentido oposto ao movemento.

5. Propiedades de simetría e leis de conservación

5.1. Unicidade da lagrangiana. Transformacións gauge.

Consideremos a lagrangiana dun sistema á que lle engadimos a derivada temporal total dunha función das coordenadas xeneralizadas e o tempo:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dM(q, t)}{dt}.$$

Podemos comprobar sen moita dificultade que L e L' satisfán as mesmas ecuacións do movemento.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L' - L)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial(L' - L)}{\partial q} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{dM}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \frac{dM}{dt} = \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial M}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial M}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t} \right) = \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial M}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t} \right) = \\
&= \frac{\partial^2 M}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial M}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial M}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial M}{\partial t} \right) = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ambas lagrangianas son igualmente válidas para describir o movemento do sistema, é dicir, a lagrangiana non é única. De feito hai un conxunto infinito de lagrangianas equivalentes para un sistema dado. Unha delas é $L = T - V$, que ás veces se chama *lagrangiana natural*, pero pode haber outras de forma distinta que se diferencian nunha derivada total.

O mesmo resultado se pode deducir do principio de Hamilton, xa que os correspondentes funcionais de acción se diferencian nun termo de fronteira:

$$S' - S = \int_{t_1}^{t_2} dt L' - \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{dM}{dt} \right) = M(q_2, t_2) - M(q_1, t_1).$$

Entón, $\delta S' - \delta S = \delta M_2 - \delta M_1 = 0$, dado que as variacións das traxectorias deixan fixos os puntos inicial e final.

Por exemplo, as lagrangianas $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2$ e $L' = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - x^2 + x\dot{x}$ levan ás mesmas ecuacións do movemento pois se diferencian en $x\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2)$: ambas son lagrangianas equivalentes para o oscilador harmónico.

Un exemplo de gran importancia é o da partícula cargada nun campo electromagnético. Neste caso, unha transformación dos potenciais dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\xi \\
\Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\xi
\end{aligned}$$

non modifica os campos eléctrico e magnético e leva a unha transformación da lagrangiana:

$$L' = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - q\Phi' + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}' = L + q \left[\frac{\partial}{\partial t}\xi + \nabla\xi \cdot \mathbf{v} \right] = L + q \frac{d}{dt}\xi$$

que, como vimos de argumentar, non ten efecto ningún sobre as ecuacións do movemento. Os potenciais non son únicos e polo tanto non poden ser observables. A lagrangiana tampouco. A transformación anterior chámase unha *transformación gauge*.

5.2. Teorema de Noether

Repasaremos nesta sección a propiedade de que unha transformación de simetría conduce sempre a unha lei de conservación. Este resultado é o que

se coñece como Teorema de Noether e é un principio xeral de toda a Física. Unha transformación de simetría é un cambio nas variables do problema que deixa invariantes as ecuacións do movemento. No noso caso, pode ser porque a lagrangiana permanece invariante (simetría da lagrangiana) ou ben porque a lagrangiana varía nunha derivada total que non contribúe á acción de Hamilton e tampouco ás ecuacións do movemento (simetría da acción).

Para probar o teorema consideremos unha transformación uniparamétrica das traxectorias:

$$q_j(t) \longrightarrow q_j(t, \alpha) = q_j(t) + \alpha \eta_j(t) = q_j(t) + \delta q_j(t)$$

onde todas as traxectorias son reais, é dicir, satisfacen as ecuacións de Lagrange. Calculemos a variación da lagrangiana:

$$\delta L = \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] = \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j + \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right].$$

O primeiro termo anúlase porque as traxectorias reais satisfacen as ecuacións de Lagrange polo que a variación da lagrangiana é unha derivada total respecto do tempo:

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right].$$

Se se trata dunha simetría da lagrangiana, $\delta L = 0$, e a cantidade entre corchetes da ecuación anterior é unha constante do movemento:

$$I = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j.$$

De maneira máis xeral, se o que temos é unha simetría da acción, a lagrangiana está determinada salvo unha derivada total: $L = L' + \frac{dM}{dt}$, e polo tanto $\delta L = \delta L' + \frac{d\delta M}{dt}$. Para que teñamos unha simetría é suficiente entón que $\delta L' = 0$:

$$\delta L = \frac{d\delta M}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - \delta M \right] = 0$$

e a cantidade conservada será, neste caso:

$$I = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - \delta M$$

Como exemplo consideremos a transformación de coordenadas. Sexa un i fixo e

$$q_j \rightarrow q_j + \alpha \delta_{ij}$$

ou sexa, trasládase a coordenada q_i unha cantidade α constante, deixando as demais sen cambios. Se a lagrangiana é invariante, por exemplo porque a coordenada q_i é cíclica, entón $M = 0$ e:

$$I = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = \sum_j p_j \delta q_j = \alpha p_i$$

e a constante do movemento é o momento canónico conxugado p_i , como xa sabemos. Se a coordenada q_i é unha coordenada cartesiana, a transformación é unha traslación espacial na dirección desa coordenada e o correspondente momento conservado é a proxección do momento lineal nesa dirección. Cando q_i é un ángulo teremos invariancia fronte a rotacións, e o momento conservado será a compoñente do momento angular na dirección do eixo de rotación. Estas leis de conservación xa foron discutidas anteriormente e para sistemas illados son consecuencia das simetrías xeométricas do espazo (e o tempo). Noutros casos non existirán necesariamente coordenadas cíclicas, a pesar do cal as lagrangianas presentan simetrías que non son evidentes e hai que descubrir.

En relación coa variable temporal, sabemos que cando a lagrangiana non depende explícitamente do tempo hai unha cantidade que se conserva, xa que:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] = \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] + \sum_j \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \dot{q}_j \end{aligned}$$

e, polo tanto:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] = 0,$$

de tal xeito que cando a lagrangiana non depende explícitamente do tempo, a cantidade entre corchetes é unha constante do movemento.

$$h = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

Isto non é máis que o que anteriormente chamamos segunda forma da ecuación de Euler. A función h chámase *función enerxía* ou *función de Jacobi* e coincide co valor da función hamiltoniana que imos definir a continuación, unha vez que fagamos un cambio nas variables dado por unha transformación de Legendre.

6. Formalismo hamiltoniano

6.1. Transformacións de Legendre e función hamiltoniana

Definamos o que se coñece matematicamente como unha transformación de Legendre. Sexa unha función $f = f(x_j, y_j, t)$, $j = 1, \dots, n$ e consideremos a súa diferencial:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \right) = w dt + \sum_j (u_j dx_j + v_j dy_j),$$

onde $u_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, $v_j = \frac{\partial f}{\partial y_j}$, $w = \frac{\partial f}{\partial t}$ e (x_j, u_j) , (y_j, v_j) , (t, w) son parellas de variables conxugadas. O obxecto da transformación de Legendre é construír unha nova función a partir de f na que parte das variables independentes, por exemplo as x_j se substitúen polas súas conxugadas. Sexa esta nova función

$$g = \sum_j u_j x_j - f$$

e escribamos a súa diferencial:

$$\begin{aligned} dg &= \sum_j (u_j dx_j + x_j du_j) - df = \\ &= \sum_j (u_j dx_j + x_j du_j) - \sum_j (u_j dx_j + v_j dy_j) - w dt = \\ &= \sum_j (x_j du_j - v_j dy_j) - w dt, \end{aligned}$$

de xeito que $g = g(u_j, y_j, t)$ con

$$\frac{\partial g}{\partial u_j} = x_j, \quad \frac{\partial g}{\partial y_j} = -v_j, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -w.$$

As variables x_j e v_j son agora funcións das variables independentes u_j e y_j segundo as ecuacións anteriores.

Á función g chámasele a *transformada de Legendre de f* .

As transformacións de Legendre úsanse en Termodinámica para construír uns potenciais termodinámicos a partir doutros. Por exemplo, a enerxía interna U é unha función da entropía e do volume $U = U(S, V)$, $dU = TdS - pdV$, de xeito que $\frac{\partial U}{\partial S} = T$ e $\frac{\partial U}{\partial V} = -p$. A entalpía H obtense mediante unha transformación de Legendre respecto ás variables conxugadas (V, p) : $H = H(S, p) = U + pV$, con $\frac{\partial H}{\partial S} = T$ e $\frac{\partial H}{\partial p} = V$. Analogamente pódense definir a enerxía libre de Helmholtz $F(T, V) = U - TS$ e a enerxía libre de Gibbs $G(T, p) = H - TS$.

En Mecánica facemos unha transformación de Legendre para pasar das variables \dot{q}_j ás súas conxugadas p_j , e da función Lagrangiana $L = L(q_j, \dot{q}_j, T)$

á función hamiltoniana ou *hamiltoniana*:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L,$$

onde

$$H = H(q_j, p_j, t)$$

é unha función das coordenadas e os momentos, que pasan a ser variables independentes que xogan un papel equivalente. Hai unha coordenada e un momento por cada grao de liberdade. O espazo de $2n$ dimensións expandido polas q_j e p_j chámase *espazo de fases* e xogará un papel importante en Mecánica Estatística, oscilacións non lineares, etc. O movemento dun punto neste espazo estará determinado polas ecuacións de Hamilton ou ecuacións canónicas.

A definición da hamiltoniana é a mesma que a función de Jacobi h , pero é importante distinguir de qué variables depende cada unha delas. En H , a transformación de Legendre fai que toda a dependencia nas velocidades \dot{q}_j sexa substituída pola dependencia nos momentos p_j . Na práctica o procedemento para obter a hamiltoniana é o seguinte: as ecuacións

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

definen os momentos como funcións das velocidades:

$$p_j = p_j(q_j, \dot{q}_j, t).$$

Se supoñemos que deste sistema de ecuacións se poden despegar as velocidades:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_j, p_j, t),$$

a hamiltoniana obtense substituíndo esta expresión na definición:

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j(q_j, p_j, t) - L(q_j, \dot{q}_j(q_j, p_j, t), t)$$

.

6.2. Ecuacións canónicas

Calculemos a diferencial de H considerando que $H = H(q_j, p_j, t)$:

$$dH = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Ademais, partindo da definición $H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$ temos que:

$$\begin{aligned} dH &= \sum_j \left(p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \\ &= \sum_j \left(\dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

xa que $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j$. Usando as ecuacións de Lagrange $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot{p}_j$, obtemos que

$$dH = \sum_j (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

e comparando:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

que son as *ecuacións de Hamilton* ou *ecuacións canónicas*. Ademais temos que, usando estas ecuacións:

$$dH = \sum_j (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

e, dividindo por dt :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_j (\dot{q}_j \dot{p}_j - \dot{p}_j \dot{q}_j) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} : \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

A función hamiltoniana ten a característica especial de que a súa dependencia total no tempo é igual á explícita, e por iso cando H non depende explicitamente do tempo (e polo tanto L tampouco) é automaticamente unha constante do movemento. Máis adiante veremos que isto non é casualidade e que a hamiltoniana satisfai estas propiedades porque é a función que xera a evolución temporal. Ademais, cando a lagrangiana é cuadrática nas velocidades, a hamiltoniana coincide coa enerxía total do sistema e pode calcularse doadamente expresando esta última en función das coordenadas e os momentos.

6.3. Exemplos

6.3.1. Partícula nun potencial central

Unha partícula que se move nun potencial central que só depende da distancia á orixe ten unha lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r)$$

en coordenadas esféricas. Os momentos canónicos conxugados son:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\phi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi},$$

relacións que se poden inverter para obter as velocidades

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta}.$$

Sustituindo estas expresións na definición $H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$ obtemos a hamiltoniana da partícula no potencial central:

$$H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + V(r).$$

Esta hamiltoniana é unha constante do movemento xa que non depende explícitamente de t . Ademais, o seu valor coincide co da enerxía total, xa que L é cuadrática nas velocidades.

En coordenadas esféricas, a simetría baixo rotacións é explícita e reflíctese no feito de que as coordenadas angulares θ , ϕ son cíclicas. Malia iso, en coordenadas cartesianas:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

e non hai ningunha coordenada cíclica, aínda que a simetría é, evidentemente, a mesma e o momento angular unha constante do movemento.

6.3.2. Partícula cargada nun campo electromagnético

A lagrangiana é:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - q\Phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

e o momento:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} - q\mathbf{A}}{m}.$$

Entón,

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}m \left(\frac{\mathbf{p} - q\mathbf{A}}{m} \right)^2 + q\Phi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\Phi.$$

Neste exemplo vemos que $H = T + V$, onde V é a parte conservativa do potencial (a que non depende da velocidade). H consérvase xa que non depende explícitamente do tempo, pero non coincide coa enerxía, que contén tamén a parte do potencial dependente da velocidade: $H = T + V \neq E = T + U$. Isto é debido a que a lagrangiana non é cuadrática na velocidade. A enerxía total non se conserva.

6.4. As ecuacións canónicas e o principio variacional

As ecuacións canónicas poden obterse tamén, por suposto, dun principio variacional. Na obtención das ecuacións de Lagrange considerabamos traxectorias no espazo de configuración n -dimensional. Agora debemos considerar a acción coma un funcional no espazo de fases de $2n$ dimensións e expresala en función da hamiltoniana da seguinte forma:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_j p_j \dot{q}_j - H \right],$$

onde $q_j(t)$ varíase coa condición de contorno $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ (non é necesario impoñer tal condición explícitamente nos p_j , como veremos máis abaixo).

Se facemos as variacións de xeito análogo ao caso lagrangiano:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right] = 0.$$

Integrando por partes o termo en $\delta \dot{q}_j$ e tendo en conta que os termos de fronteira se anulan:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[-\dot{p}_j \delta q_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[-\left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j \right] = 0 \end{aligned}$$

e se as q_j e as p_j se consideran independentes, isto condúcenos ás ecuacións de Hamilton:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

En realidade non sería necesario considerar as p_j como independentes, pois os coeficientes de δp_j son idénticamente nulos polas ecuacións da transformación de Legendre, e de feito virían fixados polos δq_j , pero isto non altera o resultado de que as ecuacións canónicas son consecuencia do mesmo principio variacional que as Lagrange e polo tanto equivalentes a elas.

6.5. Corchetes de Poisson

Definimos o *corchete de Poisson* de dúas funcións do espazo de fases $F(q, p, t)$, $G(q, p, t)$ como:

$$\{F, G\} = \sum_j \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right].$$

Esta operación ten como resultado outra función do espazo de fases e ten as seguintes propiedades:

- Antisimetría:

$$\{A, B\} = -\{B, A\}$$

- Bilinearidade:

$$\begin{aligned}\{\alpha A + \beta B, C\} &= \alpha\{A, C\} + \beta\{B, C\} \\ \{A, \beta B + \gamma C\} &= \beta\{A, B\} + \gamma\{A, C\}\end{aligned}$$

- Regra de Leibnitz

$$\begin{aligned}\{AB, C\} &= A\{B, C\} + \{A, C\}B \\ \{A, BC\} &= \{A, B\}C + B\{A, C\}\end{aligned}$$

- Identidade de Jacobi:

$$\begin{aligned}\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} &= 0 \\ \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} &= 0\end{aligned}$$

Propiedades que fan do corchete de Poisson un *produto de Lie*. Desta definición é inmediato obter os corchetes de Poisson fundamentais:

$$\begin{aligned}\{q_i, q_j\} &= \{p_i, p_j\} = 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Para unha función calquera $F(q, p, t)$ do espazo de fases, a súa derivada total respecto do tempo é:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_j \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j \right] = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_j \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right],$$

onde H é a Hamiltoniana e usamos as ecuacións canónicas. Recoñecemos no segundo membro o corchete de Poisson, polo que a derivada de F se pode escribir:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

e por iso se di que H é a función que xenera a evolución temporal. Por exemplo, para $F = q_i$, $F = p_i$:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \sum_j \left[\frac{\partial q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right] = \sum_j \delta_{ij} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \sum_j \left[\frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right] = - \sum_j \delta_{ij} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_j} = - \frac{\partial H}{\partial q_i},\end{aligned}$$

que son as ecuacións canónicas. As transformacións no espazo de fases que preservan os corchetes de Poisson chámanse *transformacións canónicas*. Da

expresión de arriba dedúcese que calquera función que non dependa do tempo explicitamente é unha constante do movemento se ten corchete nulo coa hamiltoniana:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}.$$

O Teorema de Poisson demostra que se dúas funcións son constantes do movemento, o seu corchete de Poisson tamén o é. O conxunto de cantidades conservadas cerra baixo os corchetes a *álgebra de simetría do sistema*.

Unha das maneiras de transitar da Mecánica Clásica á Mecánica Cuántica é escribir as ecuacións introducindo a constante de Planck, h , promovendo as variables canónicas a operadores e os corchetes de Poisson a conmutadores. O feito de que o corchete de Poisson dunha coordenada co seu correspondente momento conxugado non sexa nulo, $\{q, p\} = 1$, tradúcese en que os correspondentes operadores cuánticos non conmuten e polo tanto non se poidan diagonalizar simultaneamente. Isto non é máis que o *principio de incerteza* de Heisenberg.